制約駆動開発再訪

Y. Matsuda

2026 年 3 月 2 日

目次

1 概論：制約駆動問題の再定義

本稿では「制約駆動問題（Constraint-Driven Problem）」を次のように再定義する。

探索空間 $\mathcal{X}$ 上に定義された制約構造 $\mathcal{S}$ が，許容集合

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{X} \mid x \text{ satisfies } \mathcal{S}\} \subset \mathcal{X}$$

を生成する．

問題とは,

$$\text{(i) } x \in \mathcal{C} \text{ を求める} \quad \text{または} \quad \text{(ii) } \min_{x \in \mathcal{C}} J(x)$$

の形式に還元できる構造を持つ.

ここで重要なのは，制約そのものではなく,

- 探索空間 $\mathcal{X}$
- 制約構造 $\mathcal{S}$
- 許容集合 $\mathcal{C}$
- 選択規則 J

の関係である.

制約は単なる条件式ではない．それは空間の形状を決定する生成原理であり，可解性，最適性，計算可能性はこの構造に依存する.

2　線形計画法：凸幾何制約

線形計画問題は標準形で次のように書かれる：

$$\min c^T x \quad \text{s.t. } Ax \le b.$$

ここで

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$$

は凸多面体である.

制約構造は線形不等式系であり，この凸性により次が成立する：

- 局所最適解は大域最適解
- 内点法は多項式時間で収束
- ε-最適解が保証可能

線形計画では制約が空間を完全に定義し，目的関数はその境界上の点を選択する規則に過ぎない.

すなわち，制約主導型の典型例である.

補足：凸構造と双対性

線形計画における制約構造の本質は，凸幾何にある。

(1) 極点構造

許容集合

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

は凸多面体であり，その最適解は極点（vertex）上に存在する。
すなわち，

$$x^* = \text{extreme point of } \mathcal{C}$$

が成立する。
制約は単に領域を定めるだけでなく，解の候補を有限個の極点へと圧縮する。

(2) 双対問題

線形計画には双対問題が存在する。
原問題

$$\min c^T x \quad \text{s.t. } Ax \leq b$$

に対し，双対問題は

$$\max b^T y \quad \text{s.t. } A^T y = c,\ y \geq 0$$

である。
強双対性より，

$$c^T x^* = b^T y^*$$

が成立する。
ここで双対変数 y は，制約の「影の価格」を表す。
制約は単なる制限ではなく，経済的意味を持つ構造となる。

(3) 感度分析

制約ベクトル b を変化させると，

$$b \longrightarrow b + \Delta b$$

許容集合 $\mathcal{C}$ は連続的に変形する。
最適解の変化は，双対解 y^* により近似できる：

$$\Delta(c^T x^*) \approx y^{*T} \Delta b.$$

ここでは制約構造の微小変形が，解の応答を決定する。

(4) 制約の幾何的確定性

凸性により，

$$\text{局所最適} = \text{大域最適}$$

が成立する。

したがって線形計画は，制約構造が解の安定性と収束保証を理論的に確定させる稀有な例である。

3 深層学習：非凸統計制約

深層学習は一般に

$$\min_{\theta} \mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ell(f_\theta(x_i), y_i)$$

と定式化される．

しかし実際の制約構造は

$$f_\theta \in \mathcal{F}_{\text{architecture}}$$

という関数空間制限にある．

許容集合は

$$\mathcal{C} = \{\theta \in \mathbb{R}^p \mid f_\theta \text{ が構造制約を満たす}\}.$$

この集合は一般に非凸である．

収束保証は大域的には存在しないが，

- 過剰パラメータ化
- 暗黙の正則化（Implicit Regularization）
- SGD のノイズ効果

により実用上の可解性が実現している．

ここでは制約構造が明示的ではなく，統計的・構造的・動的に作用する点が特徴である．

補足：非凸制約と暗黙制約構造

深層学習における制約構造は，明示的不等式ではなく，関数空間制限および最適化アルゴリズムに内在する。

(1) 非凸許容集合

パラメータ空間 $\mathbb{R}^p$ における許容集合は，

$$\mathcal{C} = \{\theta \mid f_\theta \in \mathcal{F}_{\text{architecture}}\}$$

であるが，損失関数 $\mathcal{L}(\theta)$ は一般に非凸である。
したがって，

$$\nabla \mathcal{L}(\theta) = 0$$

を満たす点は多数存在し，局所解と鞍点が混在する。

(2) 過剰パラメータ化と解の多様体

現代の深層ネットワークでは，

$$p \gg N$$

が成立することが多い。
このとき，訓練誤差ゼロ解の集合は孤立点ではなく，

$$\mathcal{M} = \{\theta \mid \mathcal{L}(\theta) = 0\}$$

という高次元多様体を形成する。
非凸であっても，可解領域が広く存在することが，実用的収束を可能にしている。

(3) 暗黙制約（Implicit Bias）

確率的勾配降下法（SGD）は，同じ訓練誤差を達成する複数の解の中から，特定の解を選択する傾向を持つ。
例えば線形モデルでは，

$$\min \|\theta\| \quad \text{s.t. } X\theta = y$$

の最小ノルム解が選択されることが知られている。
これは明示的制約ではなく，アルゴリズムが生む暗黙制約である。

(4) 汎化と制約幾何

良好な汎化性能は，鋭い極小点よりも，広い（flat）極小点と関連すると考えられている。
すなわち，許容集合の局所幾何：

$$\lambda_{\max}\left(\nabla^2 \mathcal{L}(\theta)\right)$$

が小さい領域が，実用的に選択されやすい。
ここでは，制約構造の幾何学的性質が，汎化性能に影響を与える。

4　RSA 暗号：代数的制約空間

RSA 復号は合同式

$$m^e \equiv c \pmod{n}$$

を満たす整数 m を求める問題である．

探索空間は有限環 $\mathbb{Z}_n$，制約構造は合同式という代数的条件である．

許容集合は

$$\mathcal{C} = \{m \in \mathbb{Z}_n \mid m^e \equiv c \pmod{n}\}.$$

秘密鍵が既知なら解は一意に定まる．しかし因数分解困難性により，制約は存在しても計算可能とは限らない．

ここでは可解性が代数構造と計算複雑性に依存する．

補足：可解性と計算可能性の分離

RSA 暗号における制約は,

$$m^e \equiv c \pmod{n}$$

という合同式で与えられる。

(1) 解の存在と一意性

秘密鍵 d が既知であれば,

$$m \equiv c^d \pmod{n}$$

により解は一意に定まる。

すなわち,

$$|\mathcal{C}| = 1$$

である。

ここでは制約構造が解の存在と一意性を保証している。

(2) 計算可能性の分離

しかし公開鍵 (n, e) のみが与えられた場合，同じ制約集合 $\mathcal{C}$ は存在するにもかかわらず，その計算は困難である。

すなわち,

$$\mathcal{C} \text{ は定義可能だが,}$$

$$\mathcal{C} \text{ は計算可能とは限らない。}$$

制約の存在と，制約充足解の計算可能性は分離している。

(3) 構造の非対称性

RSA では,

$$n = pq$$

という因数分解構造が秘密であり，群構造の知識が制約充足を容易にする。
したがって,

$$\mathcal{S}_{\text{public}} \neq \mathcal{S}_{\text{private}}$$

という非対称制約構造を持つ。

(4) 制約の安全性

安全性とは，許容集合が小さいことではなく,

$$\text{許容集合への到達が計算困難であること}$$

を意味する。
ここでは，制約構造そのものがセキュリティの源泉となっている。

5 時系列故障予測：動的制約構造

時系列 $x_{1:T}$ に対して，正常状態は次のように表される：

$$x_{1:T} \in \mathcal{C}_{\text{normal}}.$$

ここで

$$\mathcal{C}_{\text{normal}} = \{x_{1:T} \mid \text{安定性・有界性・傾向制約などを満たす}\}.$$

探索空間は軌道空間 $\mathcal{X}^T$，制約構造は時間発展ダイナミクスである.
困難さは，この集合の形状が未知であり，しかも時間とともに変化する点にある.
本質は予測ではなく，制約構造の同定問題である.

補足：動的制約の同定と更新

時系列故障予測における困難さは，制約構造 $\mathcal{S}(t)$ が未知かつ時間依存である点にある。
正常集合は

$$\mathcal{C}_{\mathrm{normal}}(t) = \{x_{1:t} \mid \text{dynamic stability conditions hold}\} \subset \mathcal{X}^t$$

と表されるが，この集合は静的ではない。

(1) 制約構造の同定

観測データ $\{x_t\}$ から，暗黙的に定義される制約を推定する問題は

$$\hat{\mathcal{S}} = \arg\min_{\mathcal{S}} \mathrm{Dist}\big(\mathcal{C}_{\mathcal{S}}, \mathcal{C}_{\mathrm{observed}}\big)$$

と抽象化できる。
ここで本質は，予測精度ではなく許容集合の形状推定にある。

(2) 制約の時間更新

劣化や環境変化により，

$$\mathcal{C}_{\mathrm{normal}}(t) \neq \mathcal{C}_{\mathrm{normal}}(t + \Delta t)$$

が成立する。
したがって必要なのは，

$$\mathcal{S}(t) \;\longrightarrow\; \mathcal{S}(t + \Delta t)$$

という制約構造の逐次更新である。

(3) 緩和と強化

安全側に倒す場合，許容集合を縮小する：

$$\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}.$$

逆に過剰検知を避ける場合，集合を拡張する：

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'.$$

この操作は閾値調整に留まらず，制約幾何そのものの再設計を意味する。

(4) 早期逸脱検出

故障予測は,

$$x_{1:t} \notin \mathcal{C}_{\mathrm{normal}}(t)$$

となる最小時刻 t を推定する問題と整理できる。

これは最適化ではなく，動的制約違反検出問題である。

6 生成モデル（Transformer / LLM）：確率的制約構造

大規模言語モデル（LLM）は，自己回帰確率モデルとして次のように定式化される：

$$P(x_{1:T}) = \prod_{t=1}^{T} P(x_t \mid x_{<t}; \theta).$$

ここで探索空間はトークン列空間

$$\mathcal{X} = \mathcal{V}^T$$

であり，$\mathcal{V}$ は語彙集合である。

確率的制約構造

LLM における制約構造は，明示的不等式ではなく，学習された条件付き確率分布である。

許容集合は,

$$\mathcal{C} = \left\{ x_{1:T} \mid P(x_{1:T}) \text{ が十分大きい} \right\} \subset \mathcal{V}^T.$$

すなわち，言語モデルは「自然言語らしさ」という統計的制約構造を学習し，その高確率領域を生成する。

生成の選択規則

生成は,

$$x_t = \arg\max_{x} P(x \mid x_{<t})$$

あるいは確率的サンプリングによって行われる。

したがって生成過程は,

$$\min_{x_{1:T}} -\sum_{t=1}^{T} \log P(x_t \mid x_{<t})$$

という逐次最適化と解釈できる。

制約駆動としての特徴

LLM は次の点で他の例と異なる：

- 制約が確率分布として表現される
- 許容集合が連続的で境界が曖昧
- 解は一意でなく分布的に存在
- 暗黙制約（学習データ構造）に依存

困難性の本質

生成問題の困難さは,

- 許容集合 $\mathcal{C}$ の形状が高次元で複雑
- 制約が明示的に書けない
- 望ましい振る舞い（安全性・整合性）を制約として明確化しにくい

点にある。

ここでは制約構造は「学習された統計的ダイナミクス」であり，線形計画のような凸性保証も，RSA のような代数的一意性も存在しない。

それにもかかわらず，大規模データと過剰パラメータ化により，高確率領域が実用上の可解空間として機能している。

位置付け

以上より，生成モデルは

確率的・高次元・非凸制約空間

における逐次選択問題と整理できる。

補足：外部制約と制約操作の枠組み

本節では，生成モデルにおける制約の操作形態を，制約駆動問題の一般枠組みに沿って整理する。

(1) 外部制約注入（RLHF）

Reinforcement Learning from Human Feedback（RLHF）は，既存の確率的制約構造

$$P_\theta(x_{1:T})$$

に対し，外部評価関数 $R(x_{1:T})$ を導入する操作と解釈できる。

最適化問題としては

$$\max_{\theta} \mathbb{E}_{x\sim P_\theta}\left[R(x)\right] - \beta D_{\mathrm{KL}}\big(P_\theta \,\|\, P_{\mathrm{base}}\big)$$

の形をとる。
ここで P_{base} は事前学習モデルであり，KL 項は元の制約構造からの逸脱を抑制する役割を持つ。
すなわち RLHF は，

$$\mathcal{C}_{\mathrm{base}} \;\longrightarrow\; \mathcal{C}_{\mathrm{aligned}}$$

という許容集合の再形成操作であり，外部評価を通じた制約構造の拡張と解釈できる。

(2) 局所制約追加（プロンプト）

プロンプトは，条件付き確率

$$P(x_{1:T} \mid p)$$

を定義することにより，探索空間を

$$\mathcal{C}_p = \{x \mid x \text{ is compatible with } p\}$$

へ局所的に制限する操作である。
これは制約構造そのものを変更するのではなく，既存構造の部分集合への射影とみなせる。
したがってプロンプトは

$$\mathcal{C} \;\longrightarrow\; \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_p$$

という局所制約の追加に対応する。

(3) 制約再構成（ガードレール）

ガードレールは，生成後あるいは生成中に追加判定関数 $G(x)$ を導入し，

$$x \in \mathcal{C}_{\mathrm{safe}} = \{x \mid G(x) = 1\}$$

を満たすもののみを許容する操作である。
これは既存の確率的制約構造に対し，新たな外部集合を重ねる再構成操作：

$$\mathcal{C} \;\longrightarrow\; \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_{\mathrm{safe}}$$

に相当する。
RLHF が分布の変形であるのに対し，ガードレールは集合の明示的切断である。

(4) 一般化された制約操作

以上を抽象化すると，制約駆動問題における操作は次の三類型に整理できる：

- 制約構造の拡張（外部評価の導入）
- 局所条件による部分集合化
- 安全集合との交差による再構成

7　Graph RAG：二段制約変換問題

Graph RAG（Graph Retrieval-Augmented Generation）は，非構造テキストから構造化グラフを生成し，そのグラフを用いて検索・推論・生成を行う枠組みである。

本章ではこれを，二段の制約変換問題として整理する。

(a) 概観：二段制約変換

Graph RAG は次の二段構造を持つ：

$$\text{Text} \longrightarrow \text{Graph} \longrightarrow \text{Query}$$

それぞれを制約駆動問題として書けば,

第 1 段：グラフ化　非構造テキスト T から，制約構造 $\mathcal{S}_G$ に従うグラフ

$$G = (V, E)$$

を生成する。

ここで

$$\mathcal{C}_G = \{G \mid G \text{ satisfies ontology and schema constraints}\}$$

である。

第 2 段：クエリ生成　グラフ構造 G から，グラフデータベース用クエリ Q を生成する。

$$Q \in \mathcal{C}_Q$$

ただし

$$\mathcal{C}_Q = \{Q \mid Q \text{ preserves graph semantics and syntax constraints}\}$$

である。

したがって Graph RAG は,

$$T \xrightarrow{\mathcal{S}_G} G \xrightarrow{\mathcal{S}_Q} Q$$

という二段の制約構造変換として理解できる。

補足：構造保存と制約伝播

(1) 非構造テキストのグラフ化

テキスト T から，ノード集合 V とエッジ集合 E を抽出する問題は,

$$G = \Phi(T)$$

という写像問題である。
ただし写像 Φ は，以下の制約を満たさなければならない：

- 型制約（node type, edge type）
- 関数性制約（親は高々 1 つ等）
- 整合性制約（循環禁止など）
- 語彙制約（許容関係集合）

すなわち,

$$G \in \mathcal{C}_G \subset \mathcal{G}$$

が成立するように構造制約が適用される。
ここでは「意味の抽出」ではなく,「構造の抽出」が中心である。

(2) グラフからクエリへの変換

グラフ G を Cypher や Gremlin などのクエリ Q に変換する問題は,

$$Q = \Psi(G)$$

という構造保存写像である。
ここで必要なのは,

$$\mathrm{Semantics}(Q) = \mathrm{Semantics}(G)$$

が成立することである。
すなわち，クエリ生成は単なる文字列生成ではなく，構造同型性を保つ変換である。

(3) 制約伝播

第 1 段で導入された制約は，第 2 段へ伝播する。

$$\mathcal{S}_G \implies \mathcal{S}_Q$$

例えば：

- ノード型制約 → MATCH 句の型制約
- 関数性制約 → UNIQUE 条件
- 参照制約 → パターンマッチ制約

制約が保存されない場合，意味の破綻が生じる。

(4) 困難性の本質

Graph RAG の困難さは，

- 非構造テキストからの制約同定
- スキーマの曖昧性
- 部分グラフと全体構造の整合性
- クエリ言語との表現差

にある。
本質的には，

構造保存写像の設計

が核心である。

補足：DX を制約構造再設計問題として捉える

DX（Digital Transformation）は，既存業務や組織構造をデジタル技術により再構成する試みである。
Graph RAG が

$$T \longrightarrow G \longrightarrow Q$$

という情報構造変換であったのに対し，DX では

$$\mathcal{S}_{\text{organization}} \longrightarrow \mathcal{S}'_{\text{organization}}$$

という制約構造そのものの変換が発生する。

(1) 現行制約の形式化

業務プロセスは,

$$\mathcal{C}_{\text{current}} = \{\text{actions satisfying existing rules}\}$$

として定式化できる。

DX の第一段階は，この暗黙制約を明示化することである。

(2) 制約構造の再設計

DX では，既存制約を削除・統合・再構成する：

$$\mathcal{C}_{\text{current}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\text{digital}}$$

ここで重要なのは，単なる効率化ではなく，許容行為空間そのものの再定義である。

(3) Graph RAG との関係

Graph RAG は，業務知識や文書構造をグラフとして明示化することで，制約構造を可視化する装置となり得る。

しかし，Graph RAG は制約を「記述」する技術であり，DX は制約を「再設計」する行為である。

両者は同一ではない。

(4) 困難性の本質

DX の困難さは,

- 暗黙制約の可視化の困難
- 制約間の依存関係
- 制約変更に伴う組織的抵抗
- 技術的制約と制度的制約の不一致

にある。

したがって DX は，Graph RAG の上位概念としての「制約構造再設計問題」と位置付けられる。

8　制約の設計と課題

本章では，制約駆動問題に共通する設計課題を体系化する。制約は単なる条件ではなく，空間の形状・可解性・計算可能性を規定する構造原理である。

(1) 制約構造の同定

未知の制約構造 $\mathcal{S}$ を，観測データから推定する問題である。

$$\hat{S} = \arg\min_{\mathcal{S}} \mathrm{Dist}\big(\mathcal{C}_{\mathcal{S}}, \mathcal{C}_{\mathrm{observed}}\big).$$

深層学習や故障予測では，予測精度よりも許容集合の形状同定が本質となる。

(2) 可解性と計算可能性の分離

制約集合 $\mathcal{C}$ が定義可能であっても，その充足解が計算可能とは限らない。
RSA では，

$$m^e \equiv c \pmod{n}$$

は明示的であるが，因数分解困難性により実質的可解性は制限される。

$$\text{存在} \not\Rightarrow \text{計算可能}.$$

制約設計では，この分離を意識する必要がある。

(3) 収束保証と制約幾何

線形計画においては，

$$\mathcal{C} = \{x \mid Ax \leq b\}$$

が凸集合であるため，局所最適は大域最適である。
一方，非凸制約空間では，収束保証は一般に失われる。
制約の幾何学的性質が，最適化の安定性を決定する。

(4) 暗黙制約と運動法則

アルゴリズムは，明示的制約とは別に，暗黙制約を生む。
例えば SGD は，同一損失を持つ解の中から特定の幾何的性質を持つ解を選択する。

$$\theta^* = \arg\min_{\theta} \|\theta\| \quad \text{s.t. } \mathcal{L}(\theta) = 0.$$

制約設計には，運動法則（最適化過程）も含まれる。

(5) 動的制約と時間更新

時系列問題では，制約構造は時間依存である。

$$\mathcal{S}(t) \longrightarrow \mathcal{S}(t + \Delta t).$$

許容集合の変形を追跡しなければならない。
静的制約理論では不十分である。

(6) 制約変換と構造保存

Graph RAG のような構造変換では，制約は保存条件として現れる。

写像

$$\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

に対し，

$$x \in \mathcal{C}_X \Rightarrow \Phi(x) \in \mathcal{C}_Y$$

が要求される。

制約は集合制限だけでなく，構造同型性を保証する。

(7) 制約再設計と制度構造

DX においては，制約構造そのものが設計対象となる。

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'.$$

これは許容行為空間の再定義であり，制度設計問題と等価である。

(8) 確率的制約と分布安定性

生成モデルでは，制約は確率分布として与えられる。

$$\mathcal{C} = \{x \mid P(x) \text{ が高い}\}.$$

境界は明確でなく，分布の再形成（RLHF 等）が制約操作となる。

(9) 制約作用素の設計

以上を統合すると，制約駆動問題は，

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{S})$$

という制約作用素 $\mathcal{T}$ の設計問題と整理できる。

線形計画では $\mathcal{T}$ は安定であり，深層学習では暗黙的であり，RSA では計算困難性に守られ，故障予測では時間依存であり，Graph RAG では構造保存であり，DX では制度再構築である。

問題の本質は，探索ではなく，制約構造の設計にある。

A　付録：物理学における制約構造 — ニュートン力学から量子力学へ

本稿では制約駆動問題を多様な領域に適用してきた。本付録では，その思想的源流を物理学に求める。

A.1 ニュートン力学：動力学的制約構造

ニュートン力学の基本方程式は

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t), t)$$

である。

ここで重要なのは，重力そのものよりも，運動が微分方程式という形式により制約されるという事実である。

許容される軌道集合は,

$$\mathcal{C} = \{x(t) \mid m\ddot{x} = F(x, t)\}$$

で与えられる。

初期条件 $x(0), \dot{x}(0)$ が与えられれば，解は一意に定まる：

$$\text{初期条件} + \mathcal{S}_{\text{Newton}} \Rightarrow \text{一意軌道}.$$

ここでは，制約構造が運動可能性を完全に決定する。

ニュートンの革新は，重力という力の発見だけではなく，自然を微分方程式という制約構造で記述できることを示した点にある。

A.2 変分原理：制約の最小化形式

ラグランジュ形式では，運動は作用積分

$$S[x] = \int L(x, \dot{x}, t)\, dt$$

を停留させる軌道として定まる：

$$\delta S = 0.$$

ここでは制約は，局所的微分方程式ではなく，汎関数の停留条件として表現される。

すなわち,

$$\mathcal{C} = \{x(t) \mid \delta S[x] = 0\}.$$

制約は，最小化原理という形で再定式化される。

A.3 一般相対論：幾何学的制約

一般相対論では，重力は力ではなく，時空の幾何構造に組み込まれる。
アインシュタイン方程式：

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

は，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ に対する制約方程式である。
許容時空は,

$$\mathcal{C} = \{g_{\mu\nu} \mid G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}\}.$$

ここでは，制約が空間そのものの形状を定める。

A.4 量子力学：確率振幅の制約

量子力学では，状態は波動関数 $\psi(x,t)$ で表され，時間発展はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

により制約される。
許容状態は,

$$\mathcal{C} = \{\psi \mid i\hbar\partial_t \psi = \hat{H}\psi\}.$$

ここでは制約は確率振幅の進化法則であり，測定可能量は

$$P(x) = |\psi(x)|^2$$

として与えられる。
ニュートン力学が決定論的制約であったのに対し，量子力学は確率振幅に対する線形制約を課す。
重要なのは，確率そのものが制約構造から導出される点である。

A.5 統一的視点

物理学の歴史は，制約構造の抽象化の歴史とも言える：

- ニュートン力学：微分方程式制約
- 変分原理：最小化制約
- 一般相対論：幾何制約

- 量子力学：線形作用素制約

世界は「何が起こるか」ではなく，

何が起こり得るかを定める制約構造

によって記述される。

本稿で扱った各問題（線形計画，深層学習，RSA，故障予測，生成モデル，Graph RAG，DX）も同様に，

$$\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{C}$$

という構造を持つ。

物理学は，制約構造が現実世界を支配する最も明確な例である。

A.6 さらなる拡張：エントロピー・情報・対称性

物理学における制約概念は，さらに抽象化されている。

(1) 熱力学：エントロピー制約　熱力学第二法則は，

$$\Delta S \geq 0$$

という不等式制約として表現される。

ここで S はエントロピーである。許容される状態遷移は，

$$\mathcal{C} = \{\text{state transitions with non-decreasing entropy}\}.$$

制約は微分方程式ではなく，統計的傾向として現れる。

(2) 情報理論：情報量の制約　シャノン情報量は，

$$H(X) = -\sum p(x) \log p(x)$$

で定義される。

通信可能性は，チャネル容量

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y)$$

という最適化制約により決定される。

ここでは，情報伝達が統計的制約によって限界づけられる。

(3) 対称性と保存則　Noether の定理は，

$$\text{対称性} \implies \text{保存量}$$

を与える。

作用が時間平行移動対称であればエネルギー保存，空間平行移動対称であれば運動量保存が導かれる。

ここでは，対称性そのものが制約構造を生み出す。

(4) 小括　以上より，物理学は

- 微分制約
- 最小化制約
- 幾何制約
- 線形作用素制約
- 統計的不等式制約
- 情報容量制約
- 対称性制約

の体系として理解できる。

制約構造は，単なる制限ではなく，自然法則の形式そのものである。

B　付録 2：Physical AI と制約空間

Physical AI とは，AI が物理世界に直接作用する状況を指す。そこでは制約は抽象空間ではなく，物理法則・材料特性・エネルギー制限として現れる。

B.1 物理制約の明示化

ロボットの状態 $x(t)$ と制御入力 $u(t)$ は，力学方程式

$$M(x)\ddot{x} + C(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = u$$

により制約される。

許容軌道は,

$$\mathcal{C}_{\text{physics}} = \{x(t) \mid \text{上式を満たす}\}.$$

ここでは，制約は微分方程式として明示的に与えられる。

B.2 安全制約と可到達集合

Physical AI では，安全性が中心課題となる。

状態空間 $\mathcal{X}$ に対し，安全集合 $\mathcal{X}_{\text{safe}}$ を定義する：

$$x(t) \in \mathcal{X}_{\text{safe}} \quad \forall t.$$

可到達集合は,

$$\mathcal{R}(t) = \{x(t) \mid x(0) \in \mathcal{X}_0,\ u(\cdot) \in \mathcal{U}\}.$$

安全制約は,

$$\mathcal{R}(t) \subseteq \mathcal{X}_{\text{safe}}$$

を要求する。
ここでは制約は，行為可能空間の幾何として現れる。

B.3 エネルギー制約

物理系では，エネルギーは保存または消費制約を受ける。

$$E(t) \leq E_{\max}.$$

生成 AI が「無限生成」を行えるのとは対照的に，Physical AI はエネルギー制約下で行動する。

B.4 デジタル制約との結合

Physical AI では，確率的制約（学習モデル）と物理制約が同時に作用する。
例えば,

$$a_t \sim P_\theta(a_t \mid o_{<t})$$

で生成された行動候補は,

$$a_t \in \mathcal{C}_{\text{physics}}$$

を満たさなければならない。
したがって,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{statistical}} \cap \mathcal{C}_{\text{physical}}$$

という交差構造が生じる。

B.5 困難性の本質

Physical AI の難しさは,

- 非線形力学制約
- 不確実性
- 遅延とノイズ
- リアルタイム計算制約

が同時に存在する点にある。
ここでは制約は「破れば失敗」ではなく,「破れば物理的事故」となる。

B.6 小括

Physical AI は,

- 確率的制約
- 動的制約
- エネルギー制約
- 安全制約

が重畳する多層制約空間である。
デジタル AI が抽象制約空間を扱うのに対し，Physical AI は現実世界の制約構造と直接結合する。
したがって，制約駆動型アプローチは，Physical AI において最も強く要請される。

C 付録 3：Embodied Intelligence と制約の生成

Embodied Intelligence（身体性知能）は，知能を脳内計算の産物としてではなく，身体・環境・制御の相互作用として捉える立場である。
本稿の観点からは，それは次の主張に還元できる：

知能は，制約構造の交差領域として出現する。

C.1 知能の制約分解

身体を持つエージェントの行為 $a(t)$ は，少なくとも三種類の制約を同時に受ける：

$$\mathcal{C}_{\text{intelligence}} = \mathcal{C}_{\text{brain}} \cap \mathcal{C}_{\text{body}} \cap \mathcal{C}_{\text{environment}}.$$

- $\mathcal{C}_{\text{brain}}$：神経系・学習則の制約

- $\mathcal{C}_{\text{body}}$：力学・形態・材料の制約
- $\mathcal{C}_{\text{environment}}$：外界の物理・社会的制約

知能はこの交差集合の中でのみ実現される。

C.2 形態による探索空間の縮約

形態（morphology）は，制御入力 $u(t)$ と状態 $x(t)$ の関係を変える。

$$M(x)\ddot{x} + C(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = u$$

の形において，質量行列 $M(x)$ や重力項 $g(x)$ は，身体構造に依存する。
特定の形態は，ある行為を「自然に安定化」させる。
すなわち，

$$\mathcal{C}_{\text{reachable}} \subset \mathcal{C}_{\text{physically possible}}.$$

形態は探索空間を縮約し，制御負担を軽減する。
これはしばしば Morphological Computation と呼ばれる。

C.3 ダイナミクスとしての知能

力学系の視点では，行為は状態空間上の軌道である。

$$\dot{x} = f(x, u).$$

安定なアトラクタ集合

$$\mathcal{A} = \{x \mid f(x, 0) = 0,\ \text{stable}\}$$

が存在する場合，行為はアトラクタへの収束として理解できる。
知能とは，望ましいアトラクタ構造を設計・学習する能力とも解釈できる。

C.4 環境との相互制約

Embodied Intelligence では，環境は外部条件ではなく，制約構造の一部である。
例えば歩行は，身体内部の制御だけではなく，重力・摩擦・地面形状との結合で成立する。

$$\mathcal{C}_{\text{walking}} = \mathcal{C}_{\text{neural}} \cap \mathcal{C}_{\text{mechanical}} \cap \mathcal{C}_{\text{gravity}} \cap \mathcal{C}_{\text{ground}}.$$

知能は，制約の相互作用が安定化したときに現れる。

C.5 情報と物理の結合

感覚入力 $o(t)$ は，物理状態の写像である。

$$o(t) = h(x(t)).$$

ここで制御則

$$u(t) = \pi(o(t))$$

は，情報処理と物理ダイナミクスを結びつける。
知能は，情報制約と物理制約の同時充足問題である。

C.6 制約生成としての知能

重要なのは，知能が制約に従うだけでなく，新たな制約構造を生成する点である。
学習とは,

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$$

という制約構造更新である。
身体を持つ知能では，この更新は物理環境との相互作用の中で行われる。

C.7 小括

Embodied Intelligence は，知能を内部計算量ではなく，制約構造の重なりとダイナミクスとして理解する立場である。
それは,

知能とは，制約の中に埋め込まれた運動の安定構造である

という命題に要約できる。
本稿で論じた制約駆動問題は，抽象空間における構造設計であった。
Embodied Intelligence は，その構造が物理世界と不可分であることを示す。

D　付録 4：進化と制約構造 — 生成される制約

進化はしばしば「変異と選択の結果」と説明される。
しかし制約駆動の観点からは，進化とは

制約構造の内部で起こる探索と，制約構造そのものの更新過程

である。

D.1 進化の基本式：Lande 方程式

量的形質ベクトル z の世代変化は

$$\Delta z = G\beta$$

で与えられる。
ここで，

- G：遺伝分散共分散行列
- $\beta = \nabla W(z)$：適応度勾配

である。
重要なのは，進化方向が G によって制限される点である。
もし G のランクが $r < n$ なら，

$$\Delta z \in \mathrm{Im}(G)$$

であり，それ以外の方向への進化は起きない。
進化は線形制約空間の中で起きる。

D.2 発生的制約

形態は発生過程によって制限される。
可能な形態集合は

$$\mathcal{C}_{\text{development}} = \{z \mid z \text{ は発生過程で実現可能}\}.$$

この集合外の形質は，選択があっても出現しない。
進化は

$$z \in \mathcal{C}_{\text{genetic}} \cap \mathcal{C}_{\text{development}} \cap \mathcal{C}_{\text{physical}}$$

の内部でのみ進行する。

D.3 適応地形と制約付き最適化

適応度関数 $W(z)$ に対し，進化は

$$\max_{z \in \mathcal{C}} W(z)$$

という制約付き最適化問題とみなせる。
ただし，探索は勾配方向に局所的に進む。
したがって進化は，

$$\text{制約空間上の勾配力学}$$

である。

D.4 制約の更新

進化の重要な特徴は，制約構造自体が変化する点である。
例えば突然変異率の変化や，発生経路の再編成は，

$$G \longrightarrow G'$$

という制約作用素の変換に相当する。
すなわち，

$$\mathcal{S}(t) \longrightarrow \mathcal{S}(t + \Delta t).$$

進化は，制約内部の探索であると同時に，制約の生成過程でもある。

D.5 可進化性（Evolvability）

可進化性とは，制約構造がどれだけ多様な方向への変化を許すかを示す概念である。
形式的には，

$$\mathrm{rank}(G)$$

や，

$$\mathrm{trace}(G)$$

がその指標となる。
可進化性は，制約空間の次元に関わる。

D.6 小括

進化は，

- 制約空間内の探索
- 制約構造の時間的更新
- 制約次元の拡張または縮退

として理解できる。
それは単なる最適化ではなく，

制約構造の歴史的生成過程

である。
物理法則が固定制約を与えるのに対し，進化は制約を変化させる。
この意味で，進化は制約理論の時間拡張と位置づけられる。

D.7 曖昧さと制約未分化

曖昧さはしばしば，不完全性や情報不足として扱われる。
しかし進化的観点では，曖昧さは

未分化な制約構造

として理解できる。
(1) 曖昧さと多様性　形質 z が明確な一点ではなく，広がりを持つ集合

$$z \in \mathcal{A}$$

として存在する場合，これは制約の弱い状態を意味する。

$$\mathcal{C}_{\text{strict}} \subset \mathcal{C}_{\text{ambiguous}}.$$

曖昧な状態は，より大きな可動領域を持つ。
(2) 曖昧さと可進化性　進化の方向は

$$\Delta z = G\beta$$

で与えられるが，制約が過度に厳格であれば，$\mathrm{rank}(G)$ は低下する。
曖昧さは，制約の硬化を防ぎ，可進化性を維持する役割を持つ。
(3) 曖昧さは欠陥か　曖昧さは，誤りや未熟さではなく，

制約分岐の潜在空間

である。
明確化とは，

$$\mathcal{C}_{\text{ambiguous}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\text{specific}}$$

という制約の収縮である。

進化は，曖昧な可能性空間から，安定な制約構造を選択する過程である。

(4) 小括　曖昧さは，制約の不在ではなく，制約の未固定状態である。

それは進化において，将来の構造分岐を許容する柔軟性として機能する。

E　付録 5：制約と自由 — 制約空間における意志

制約はしばしば自由の否定とみなされる。しかし制約駆動の観点からは，自由とは制約の不在ではない。

自由は,

制約空間の内部に存在する可動領域

として理解できる。

E.1 制約と可動性

ある制約構造 $\mathcal{S}$ が定める許容集合を

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$$

とする。

自由度とは,

$$\dim(\mathcal{C}_{\mathcal{S}})$$

に対応する。

制約がなければ，行為は定義されない。制約が過度であれば，行為は消滅する。

自由とは,

$$\emptyset \subsetneq \mathcal{C}_{\mathcal{S}} \subsetneq \mathcal{X}$$

が成立する状態である。

E.2 意志と制約選択

意志を，制約の内部での選択能力とみなすなら,

$$a \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$$

の中からの選択が意志である。

さらに，制約構造そのものを更新する能力，

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$$

を持つなら，それは高次の自由といえる。

E.3 制約なき自由は存在しない

物理法則，生物的制約，社会的規範。
いずれも完全に消去することはできない。
自由とは，

制約の中での構造的運動

である。
本稿で扱ったすべての問題は，制約を排除するのではなく，制約を設計し，その内部で可動性を確保する試みであった。
制約は自由の敵ではない。むしろ，自由を定義する枠組みである。

F 付録 6：Transformer / LLM のセマンティクスと制約幾何

Transformer や LLM は，条件付き確率分布

$$P_\theta(x_t \mid x_{<t})$$

を学習するモデルである。
通常，意味（semantics）は内部表象や世界対応として議論されるが，本稿の観点からは次のように再定義できる：

セマンティクスとは，高確率列として安定に生成される言語空間の制約構造である。

F.1 分布としての制約空間

系列全体の確率は

$$P_\theta(x_{1:T}) = \prod_{t=1}^{T} P_\theta(x_t \mid x_{<t})$$

で与えられる。
したがって許容集合は，

$$\mathcal{C}_{\mathrm{LLM}} = \{x_{1:T} \mid P_\theta(x_{1:T}) \text{ が十分高い}\}.$$

意味とは，この集合の幾何学的形状に対応する。

F.2 セマンティクスの交差構造

自然言語の意味は単一制約ではない。

$$\mathcal{C}_{\mathrm{semantic}} = \mathcal{C}_{\mathrm{syntax}} \cap \mathcal{C}_{\mathrm{cooccurrence}} \cap \mathcal{C}_{\mathrm{context}} \cap \mathcal{C}_{\mathrm{world\text{-}like}}.$$

LLM はこれらを明示的に分離せず，統計的重畳として近似する。

F.3 Self-Attention と動的制約再構成

Self-Attention は

$$\mathrm{Attention}(Q, K, V) = \mathrm{softmax}\left(\frac{QK^\top}{\sqrt{d}}\right) V$$

により，トークン間依存関係を動的に再重み付けする。
これは,

$$\mathcal{C}_{\mathrm{context}}$$

を逐次更新する機構と解釈できる。
文脈とは，局所的制約の再構成過程である。

F.4 RLHF と制約変形

RLHF や指示チューニングは,

$$P_\theta \longrightarrow P_{\theta'}$$

という分布更新である。
これは,

$$\mathcal{C}_{\mathrm{semantic}} \longrightarrow \mathcal{C}'_{\mathrm{semantic}}$$

という制約空間の変形に相当する。
意味は固定構造ではなく，社会的・評価的制約によって変形される。

F.5 意味と安定性

LLM における意味は，真理条件ではなく，生成安定性に基づく。
ある表現が意味を持つとは，

$$x \in \mathcal{C}_{\mathrm{LLM}}$$

が安定に成立することを指す。
意味とは，確率的制約空間における安定領域である。

F.6 小括

Transformer / LLM のセマンティクスは，

- 内在的概念体系ではなく
- 世界の直接写像でもなく
- 確率的制約空間の幾何構造

として理解できる。
本稿で扱った制約駆動問題と同様に，ここでも重要なのは

$$\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{C}$$

という構造である。
言語モデルは，分布という形式でセマンティック制約を近似する装置である。

G　付録 7：複雑系と制約構造 — 相互制約からの秩序生成

複雑系とは，多数の要素が相互作用し，全体として予測困難な振る舞いを示す系を指す。
しかし制約の観点からは，複雑性は無秩序ではない。

複雑性とは，多層的制約構造の相互作用である。

G.1 状態空間と制約

状態ベクトル $x \in \mathcal{X}$ に対し，力学系は

$$\dot{x} = f(x)$$

で与えられる。
ここで許容軌道集合は

$$\mathcal{C} = \{x(t) \mid \dot{x} = f(x)\}.$$

非線形性が導入されると，アトラクタ集合

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$$

が形成される。
複雑性は，この制約構造が単純な幾何を持たないことに由来する。

G.2 自己組織化と制約生成

自己組織化とは，外部から秩序を与えられずに，内部相互作用から秩序が生まれる現象である。
制約の観点では，

$$\mathcal{S}(t) \longrightarrow \mathcal{S}(t + \Delta t)$$

という内部更新が起きている。
秩序とは，制約の増加または安定化である。

G.3 シナジェティクス（Haken）

Haken のシナジェティクスでは，多数自由度の系が，少数の秩序変数によって記述可能になる。

$$x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \text{order parameters } y \in \mathbb{R}^k,\ k \ll n.$$

これは，有効制約次元の縮約を意味する。
複雑系の秩序は，制約空間の低次元化として理解できる。

G.4 臨界性と制約境界

複雑系はしばしば，秩序と無秩序の境界（edge of chaos）に位置する。
これは，

$$\mathcal{C}_{\text{stable}} \cap \mathcal{C}_{\text{unstable}}$$

の境界に対応する。
制約が強すぎれば秩序は硬直し，弱すぎれば無秩序になる。
複雑性は，制約強度の臨界領域で最大化される。

G.5 最大エントロピーと制約

統計力学では，エントロピー最大化

$$\max S \quad \text{s.t. 制約条件}$$

により分布が決まる。
例えば,

$$\sum p_i = 1, \quad \sum p_i E_i = \langle E \rangle$$

の下で，ボルツマン分布が導かれる。
ここでは，制約がマクロ秩序を決定する。

G.6 ネットワーク制約

複雑ネットワークでは，接続制約が振る舞いを決定する。

$$A_{ij} \in \{0, 1\}$$

という隣接行列の構造は，伝播・同期・安定性を制限する。
複雑性は，構造制約の幾何から生じる。

G.7 小括

複雑系は,

- 非線形力学制約
- 相互作用制約
- 統計的制約
- 構造制約

が重畳した系である。
複雑性は，制約の欠如ではない。
それは,

多層制約の相互作用が生む動的秩序

である。

G.8 制約境界付近の揺らぎ

複雑系において，曖昧さや不確定性は，単なる情報不足ではない。
それは,

制約境界付近の揺らぎ

として理解できる。
(1) 制約境界　制約集合を

$$\mathcal{C} = \{x \mid g(x) \leq 0\}$$

とする。
境界は

$$\partial\mathcal{C} = \{x \mid g(x) = 0\}$$

である。
境界近傍では，微小な摂動 δx により，

$$x \in \mathcal{C} \longleftrightarrow x + \delta x \notin \mathcal{C}$$

が容易に起こる。
この不安定性が揺らぎを生む。
(2) 臨界性と揺らぎ増幅　複雑系が臨界点近傍にある場合，応答関数は発散的挙動を示す。

$$\chi \to \infty$$

ここで χ は感受率である。
制約境界では，小さな変化が大域的変化へと増幅される。
曖昧さは，この増幅可能性を内包する。
(3) 曖昧さは可動性の源泉　境界から十分離れた点では，行為は安定だが変化は起こりにくい。
一方，

$$x \approx \partial\mathcal{C}$$

では，揺らぎが構造変化を誘発する。
曖昧さは，制約破壊ではなく，制約再編の契機となる。
(4) 小括　曖昧さは，

制約の未決定性

ではなく，

制約境界近傍における動的揺らぎ

である。
それは，複雑性，進化，学習，創発の出発点となる。